Hochschule für Philosophie München
Philosophische Fakultät S.J.

Institut für naturwissenschaftliche Grenzfragen
zur Philosophie und Theologie (ING)

Hauptseminar:

Gödel und was daraus folgt: Einige
philosophische Fragen der Mathematik

im SS 2006

bei Dr. rer. nat. Stefan Bauberger SJ / Dipl.-Volkswirt Andreas Gösele SJ

Gödels zweiter Unvollständigkeitssatz

Eine Frage der Konsistenz und Wahrheit

Eingereicht von:

Johannes Grössl (FS 2)
am 16.10.2006

Johannes Grössl – Rambergstr. 6 – 80799 München – 089 / 38 39 49 32 – joe@fto.de

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung 1

   1.1 Aufgabenstellung 1

   1.2 Anmerkungen zu einem möglichen Konsistenzbeweis 1

2. Arithmetizität der Konsistenz 2

   2.1 Arithmetizität des Provable-Prädikats 2

   2.2 Von der Beweisbarkeit zur Konsistenz 3

3. Die Unentscheidbarkeit der Konsistenz 4

   3.1 Fixpunkte 4

   3.2 Beweisbarkeitsprädikate 4

   3.3 Weitere Voraussetzungen 4

   3.4 Beweisführung unter Voraussetzung der ω–Konsistenz 5

   3.5 Beweisführung unter Voraussetzung der einfachen Konsistenz 6

4. Die Konsistenz der Peano-Arithmetik 7

   4.1 Mathematischer Konstruktivismus 7

   4.2 Universalität des Nichtwiderspruchsprinzips 8

   4.3 Mathematischer Realismus 9

5. Schlussworte 10

Literaturverzeichnis 12

Anhang 13

1 Einleitung

Kurt Gödel bewies im Jahre 1931, dass jedes hinreichend mächtige formale System entweder unvollständig oder inkonsistent ist.[1] Es gibt folglich in jedem konsistenten (und hinreichend mächtigen) formalen System mindestens einen unentscheidbaren Satz. Gödels zweiter Unvollständigkeitssatz beschreibt einen grundlegenden unentscheidbaren Satz in dem mathematischen Axiomensystem der Arithmetik:

THEOREM G2: Wenn die Peano Arithmetik konsistent ist, dann lässt sich aus deren Axiomen ein Beweis ihrer Konsistenz nicht ableiten.[2]

Die Widerspruchsfreiheit eines Systems Γ wird hier durch das Prädikat $consis_\Gamma$ dargestellt. Ein System ist genau dann widerspruchsfrei (konsistent), wenn für jeden aus dem System ableitbaren Satz es nicht zutrifft, dass seine Negation ableitbar ist.

$$consis_\Gamma \iff \forall A\ ((\Gamma \vdash A) \Rightarrow (\Gamma \nvdash \neg A)) \qquad \text{(wobei A einen Satz darstellt)} \qquad (1)$$

Da sich aus einem inkonsistenten System *alle* Sätze herleiten lassen („ex falso quodlibet"), kann man *consis* auch einfacher beschreiben. Ein System ist genau dann inkonsistent, wenn sich eine beliebige Kontradiktion (dargestellt durch $\bar{f}$, z.B. $0 = 0'$ oder $X \wedge \neg X$) aus den Axiomen ableiten lässt; es ist genau dann konsistent, wenn sich solch eine Kontradiktion nicht ableiten lässt.

$$consis_\Gamma \iff \neg(\Gamma \vdash \bar{f}) \qquad (2)$$

Das zu beweisende **Theorem G2** lässt sich wie folgt formalisieren:

$$consis_{\mathbf{PA}} \Rightarrow \mathbf{PA} \nvdash consis_{\mathbf{PA}} \qquad (3)$$

1.1 Aufgabenstellung

In dieser Arbeit soll zuerst bewiesen werden, dass *consis* vollständig arithmetisch ist, d.h. in einer Sprache wie der Peano Arithmetik formulierbar ist, ohne metasprachliche Elemente miteinzubeziehen, und schließlich, dass *consis* in einem konsistenten System unentscheidbar ist. Im 4. Kapitel werden dann der auch von Gödel vertretene mathematische Realismus und einige Gegenpositionen diskutiert.

1.2 Anmerkungen zu einem möglichen Konsistenzbeweis

Da sich, wie schon zuvor erwähnt, aus einem inkonsistenten System alle arithmetischen Sätze herleiten lassen, würde sich aus einem solchen System auch ein arithmetisches *consis* beweisen lassen. Folglich wäre ein arithmetischer Beweis von *consis* noch kein Beweis für die Konsistenz eines Systems. (Solch einen Beweis zu akzeptieren wäre ähnlich naiv wie

[1] Vgl. Gödel 1988, 40f.
[2] Smullyan 1992, 106.

zu glauben, dass ein Mensch, der behauptet, er lüge nie, immer die Wahrheit spricht.[3]) Wenn sich jedoch herausstellt, dass *consis* in einem konsistenten System unentscheidbar sein muss, wäre die Existenz eines arithmetischen Beweises von *consis* sogar ein Beweis für die Inkonsistenz des Systems.

2 Arithmetizität der Konsistenz

Ein System ist genau dann konsistent, wenn eine beliebige Kontradiktion nicht überprüfbar (d.h. beweisbar, aus den Axiomen herleitbar) ist. Die Ableitbarkeit eines Satzes S aus den Axiomen der Peano-Arithmetik wurde bisher als $\mathbf{PA} \vdash S$ dargestellt. Gesucht ist nun ein arithmetisches Prädikat $Prov(x)$, das genau dann wahr ist, wenn der Ausdruck, dessen Gödelzahl der Parameter x ist, ein aus den Axiomen ableitbarer Satz ist.

$$Prov(x) \Longleftrightarrow \mathbf{PA} \vdash E_x \tag{4}$$

Unter Verwendung von (2) und (4) lässt sich nun auch die Konsistenz arithmetisch ausdrücken, unter der Voraussetzung, dass das Provable-Prädikat arithmetisch ist:

$$consis \Longleftrightarrow \neg Prov(\bar{f}) \tag{5}$$

Diese Voraussetzung soll nun bewiesen werden.

2.1 Arithmetizität des Provable-Prädikats

Eine arithmetischer Satz ist dann beweisbar, wenn es mindestens einen Beweisgang y gibt, in dem dieser Satz vorkommt.

$$Prov(x) \Longleftrightarrow \exists y\ (Pf(y) \wedge x \in y) \tag{6}$$

Ein Ausdruck ist ein Beweisgang, wenn dieser eine Folge von Sätzen ist und jeder enthaltene Satz entweder ein Axiom ist oder von einem bzw. von zweien der vorausgehenden Sätze ableitbar ist.

$$Pf(x) \Longleftrightarrow Seq(x) \wedge (\forall y\ \in x)(A(y) \vee (\exists z\ , w \prec_x y)Der(z, w, y))\ \ ^{4} \tag{7}$$

Dass die Überprüfung auf ein Axiom $A(x)$ arithmetisch ist, zeigt Gödel ausführlich auf.[5] Es verbleibt die Überprüfung auf Arithmetizität der Überprüfungsfunktionen auf eine Folge $Seq(x)$ sowie auf die Ableitbarkeit aus einem der vorausgehenden Sätze $Der(z, w, y)$.

1. Ein geordnete Folge von Zahlen $(n_1, n_2, ...)$, bei der jedes Element n_i jeweils die Gödelzahl eines bedeutungsvollen Ausdruck beschreibt, wird gödelisiert als $\delta n_1 \delta n_2 \delta ... \delta$ dargestellt. Eine Zahl x ist also dann eine gödelisierte Folge (*sequence number*) von bedeutungsvollen Ausdrücken, wenn sie (1) jeweils mit δ beginnt und endet, (2) länger als ein Zeichen lang ist, also nicht nur aus einem δ besteht, (3) keine zwei Deltas hintereinander vorkommen [6] und (4) keine Zahl größer als 0 ein Element der Folge ist.

$$Seq(x) \Longleftrightarrow \delta Bx \wedge \delta Ex \wedge \delta \neq x \wedge \delta\delta\tilde{P}x \wedge (\forall y\ \leq x)(\delta 0 y P x \rightarrow \delta B y)\ \ ^{7} \tag{8}$$

[3] Vgl. ebd., 109.
[4] Ebd., 35.
[5] Gödel 1988, 28; vgl. dazu auch Smullyan 1992, 36.
[6] Dadurch werden sowohl leere Elemente als auch Elemente, die wiederum Folgen sind, ausgeschlossen.
[7] Smullyan 1992, 32.

2. Ein Satz mit der Gödelnummer z ist dann von einem oder von zwei anderen Sätzen ableitbar, wenn dieser entweder (a) mit zwei anderen Sätzen als Prämissen durch die Schlussregel *modus ponens* oder (b) durch Verallgemeinerung (*Generalization*) eines anderen Satz gebildet werden kann.

$$Der(x) \Longleftrightarrow \mathrm{MP}(x, y, z) \vee Gen(x, z) \tag{9}$$

Die boolsche Funktion $\mathrm{MP}(x, y, z)$, welche die Schlussregel *modus ponens* beschreibt, lässt sich einfach formalisieren, da z dabei nur eine Verbindung der Prämissen x und y durch den Operator der Subjunktion $\rightarrow$ darstellen muss. (Die Subjunktion erhält hier in der Gödelisierung zur Basis 13 die Ziffer 8; die Ziffern 2 und 3 beschreiben die notwendigen Klammern um diese Formel). Bei der Verallgemeinerung $Gen(x, y)$ wird der zweite Parameter aus dem ersten dadurch gebildet, dass vor diesen ein $\forall(\ v_i)$ gestellt wird. (Gödelisiert ist dies $9 * 2 * 6 * Sb(i) * 3 * x$, wobei Sb(i) eine Verkettung von i *subscripts* mit der Ziffer 5 beschreibt, s. Anhang).

$$MP(x, y, z) \Longleftrightarrow z = 2x8y3\ ^{8} \tag{10}$$

$$Gen(x, y) \Longleftrightarrow (\exists z\ \leq y)(Sb(z) \wedge y = 926z3x)\ ^{9} \tag{11}$$

Zusammen mit den im Anhang geführten bzw. verwiesenen Beweisen für die Arithmetizität von $A(x)$, $Sb(x)$, $x \in y$, $x \prec_z y$, $x * y$, xBy, xEy, xPy, von Exponentialoperationen sowie von Verbindungen mit dem Existenzquantor lässt sich hiermit beweisen, dass das Prädikat $Prov(x)$, das einen Satz auf ihre Beweisbarkeit, also ihre Ableitbarkeit von den Axiomen des Systems, prüft, selbst arithmetisch ist.

$$\begin{aligned} Prov(x) \quad \Longleftrightarrow \quad & (\exists y\ )\{\delta By \wedge \delta Ey \wedge \delta \neq y \wedge \delta\delta\tilde{P}y \\ & \wedge [\forall z\ \in y][A(z) \vee (\exists v\ , w \prec_y z)((z = 2v8w3) \\ & \vee (\exists i\ \leq z)(Sb(i) \wedge z = 926i3v))] \wedge x \in y\} \end{aligned} \tag{P}$$

2.2 Von der Beweisbarkeit zur Konsistenz

Ist das Prädikat $Prov(x)$ arithmetisch, so ist es auch $\neg Prov(\bar{f})$. $\bar{f}$ kann man beispielsweise durch die Gödelzahl $721\eta 13$, die der Formel $\neg(0 = 0)$ entspricht, ersetzen. Somit ist bewiesen, dass *consis*, das nach Formel (4) zu $\neg Prov(\bar{f})$ äquivalent ist, arithmetisch ist.

[8] Ebd., 35
[9] Ebd.

3 Die Unentscheidbarkeit der Konsistenz

3.1 Fixpunktkonstruktion und Gödels erstes Theorem

Ein Fixpunkt ist in der Analysis ein Punkt, der die Bedingung $f(x) = x$ erfüllt. In der Peano-Arithmetik und in jedem anderen diagonalisierbaren System lässt sich für jedes Prädikat ein Fixpunkt konstruieren, indem man die Gödelzahl des Prädikats als Parameter in dieses Prädikat einsetzt. Setzt man nun die Arithmetizität des Provable-Prädikats voraus, lässt sich daraus ein Fixpunkt konstruieren:

$$G \Leftrightarrow Prov(G) \tag{12}$$

Dass ein Satz G genau dann wahr ist, wenn er beweisbar ist, stellt noch kein Problem dar. Konstruiert man jedoch aus der Negation des Provable-Prädikats (welche wiederum ein arithmetisches Prädikat ist) einen Fixpunkt, erhält man einen unentscheidbaren Satz. [10] Die Existenz eines solchen Satzes ist die Behauptung des ersten gödelschen Unvollständigkeitssatzes:

$$G \Leftrightarrow \neg Prov(G) \tag{13}$$

3.2 Beweisbarkeitsprädikate

Eine Formel $P(v_1)$ ist ein *Standard-Beweisbarkeitsprädikat* (nicht zu verwechseln mit dem Provable-Prädikat) für S, wenn die folgenden drei BernaysLöb-Ableitbarkeitsbedingungen für alle Sätze X und Y erfüllt sind: [11]

$$S \vdash X \quad \Rightarrow \quad S \vdash P(X) \tag{P_1}$$
$$S \vdash [P(X \bar{\rightarrow} Y) \rightarrow (P(\bar{X}) \rightarrow P(\bar{Y}))] \tag{P_2}$$
$$S \vdash [P(\bar{X}) \rightarrow P(\bar{P}(X))] \tag{P_3}$$

$P(v_1)$ stellt die Menge aller beweisbaren Sätze (in einem ω -konsistenten System) bzw. eine Obermenge dieser Menge (in einem einfach konsistenten System) dar.[12]

$$\begin{array}{l} consis\omega \Rightarrow \forall X\ [Prov(X) \leftrightarrow P(X)] \\ consis \Rightarrow \forall X\ [Prov(X) \rightarrow P(X)] \end{array} \tag{14}$$

Für alle Beweisbarkeitsprädikate gilt auch (aus P_1, P_2 und P_3 ableitbar[13]):

$$S \vdash X \rightarrow (P(\bar{X}) \rightarrow Y) \quad \Longrightarrow \quad S \vdash P(\bar{X}) \rightarrow (P(P(\bar{X})) \rightarrow P(\bar{Y})) \tag{P_6}$$

3.3 Weitere Voraussetzungen

Aus einem Beweisbarkeitsprädikat lässt sich ähnlich wie bei dem zuvor eingeführten Provable Prädikat ein Konsistenzsatz konstruieren:

$$cons_P \Longleftrightarrow \neg P(\bar{f}) \tag{15}$$

Für diesen Konsistenzsatz gilt (wegen Prämisse P_1):

$$cons_P \Longrightarrow consis \tag{16}$$

[10] Ein solcher Gödelsatz besagt, dass er selbst nicht beweisbar ist. Ist der Satz falsch, wäre er beweisbar; ist er wahr, wäre er widerlegbar. Damit das System konsistent bleibt, muss der Satz folglich unentscheidbar sein.

[11] Smullyan 1992, 106, sowie Bülow 1998, 27.

[12] Vgl. Smullyan 1992, 106.

[13] Vgl. ebd., 107.

Theorem G besagt: Wenn G ein Fixpunkt der Formel $\neg P(v_1)$ ist, dann ist der Satz $cons_P \rightarrow G$ beweisbar. [14]

$$Prov(cons_P \rightarrow G) \tag{G}$$

Beweis:

(a.1)	$S \vdash$	G	$\Leftrightarrow$	$\neg P(\bar{G})$	Fixpunktkonstruktion
(a.2)	$S \vdash$	$\neg P(\bar{G})$	$\Leftrightarrow$	$(P(\bar{G}) \rightarrow f)$	ex falso quodlibet
(a.3)	$S \vdash$	G	$\Leftrightarrow$	$(P(\bar{G}) \rightarrow f$	HS (a.1,a.2)
(a.4)	$S \vdash$	G	$\Rightarrow$	$(P(\bar{G}) \rightarrow f)$	Bisubj. (a.3)
(a.5)	$S \vdash$	$P(\bar{G})$	$\rightarrow$	$P(\bar{f})$	MP (P_6, a.4))
(a.6)	$S \vdash$	$\neg P(\bar{f})$	$\rightarrow$	$\neg P(\bar{G})$	Kontrap (a.5)
(a.7)	$S \vdash$	$\neg P(\bar{f})$	$\rightarrow$	G	(a.1) in (a.6)
(a.8)	$S \vdash$	$cons_P$	$\rightarrow$	G	(15) in (a.7)

3.4 Beweisführung unter Voraussetzung der ω -Konsistenz

Die ω-Konsistenz lässt sich in P.A. auch arithmetisch beschreiben: [15]

$$consis\omega \Longleftrightarrow \exists B\ [\exists x\ (S \vdash B(x)) \wedge S \vdash (\forall n < \omega\ \neg B(n))] \tag{17}$$

Unter der Annahme, dass P.A. ω-konsistent ist, stellt $P(v_1)$ nicht nur eine Obermenge der Menge aller beweisbaren Sätze dar, sondern repräsentiert genau diese Menge aller beweisbaren Sätze.[16]

$$consis\omega \Longrightarrow \forall X\ (P(\bar{X}) \Leftrightarrow Prov(\bar{X})) \tag{18}$$

Es lässt sich nun einfach beweisen, dass aus einem ω -konsistenten System ein Beweis für dessen Konsistenz nicht ableitbar sein kann.

(b.1)	$consis\omega \rightarrow \neg Prov(G)$		1. Gödelsatz
(b.2)	$P(\neg P(\bar{f}) \rightarrow G)$		MP (P_1,a.7)
(b.3)	$P(\neg P(\bar{f})) \rightarrow P(G)$		MP (P_2,b.2)
(b.4)		$consis\omega$	Annahme
(b.5)		$Prov(\neg Prov(\bar{f})) \rightarrow Prov(G)$	(18),b.3
(b.6)		$\neg Prov(G)$	MP (b.1,b.4)
(b.7)		$\neg Prov(\neg Prov(\bar{f}))$	MT (b.5,b.6)
(b.8)		$\neg Prov(consis)$	(2), b.7
(b.9)	$consis\omega \rightarrow \neg Prov(consis)$		b.4, b.8

Wenn die Peano-Arithmetik ω-konsistent ist, dann ist sie zwar konsistent[17], doch aus ihren Axiomen lässt sich kein Konsistenzbeweis ableiten. Die Konsistenz eines ω-konsistenten Systems ist demnach unentscheidbar.

[14] Ebd., 108.
[15] Vgl. ebd., 56f.
[16] Vgl. ebd., 108.
[17] Vgl. ebd., 58.

3.5 Versuch einer Beweisführung unter Voraussetzung der einfachen Konsistenz

3.5.1 Löbsches Theorem

In einem diagonalisierbaren System Γ gilt:

$$\Gamma \vdash (P(\alpha) \to \alpha) \implies \Gamma \vdash \alpha \qquad \text{(L)}$$

Beweis durch Konstruktion eines Fixpunktes X für die Formel $P(v_1) \to Y$: [18]

(c.1)	$S \vdash P(\bar{Y}) \to Y$	Annahme
(c.2	$S \vdash X \leftrightarrow P(\bar{X}) \to Y$	Fixpunktkonstruktion
(c.3)	$S \vdash X \to (P(\bar{X}) \to Y)$	Bisubj. (c.2)
(c.4)	$S \vdash P(\bar{X}) \to P(\bar{Y})$	MP (P_6,c.3)
(c.5)	$S \vdash P(\bar{X}) \to Y$	HS (c.4,c.1)
(c.6)	$S \vdash X$	c.2, c.5
(c.7)	$S \vdash P(X)$	MP (P_1,c.6)
(c.8)	$S \vdash Y$	MP (c.5,c.7)
(c.9)	$S \vdash P(\bar{Y}) \to Y \implies S \vdash Y$	(c.1,c.8)

3.5.2 Beweisführung

(d.1)	$S \vdash cons_P$	Ann.: Konsistenz ist beweisbar
(d.2)	$S \vdash \neg P(\bar{f})$	d.1, (15)
(d.3)	$S \vdash P(\bar{f}) \to f$	ex falso quodlibet
(d.4)	$S \vdash f$	MP (L, d.3)
(d.5)	$\neg consis$	d.4, (2)
(d.6)	$S \vdash cons_P \implies \neg consis$	(d.1,d.5)
(d.7)	$consis \implies S \nvdash cons_P$	Kontrap. (d.6)

Der Satz $cons_P$ drückt die Konsistenz eines Systems jedoch nur dann aus, wenn das System zumindest ω-konsistent ist; dieser Beweis wurde aber schon in Kapitel 3.4 erbracht. Von $cons_P$ darf man nicht automatisch *consis* folgern (Vgl. Kapitel 3.3). Raymond Smullyan geht auf Seite 109 seines Buches nicht weiter auf dieses Problem ein; er redet sich heraus, indem er Gödels zweites Theorem abändert: „Therefore, if S is consistent, then the sentence consis is not provable“. Der Satz *consis* in Smullyans 9. Kapitel entspricht jedoch dem Satz $cons_P$ in diesem Aufsatz, und nicht dem Satz *consis*, welcher die eigentliche Konsistenz des Systems beschreibt. Identisch sind diese nur bei ω -Konsistenz oder Korrektheit des Systems.

Es ist zumindest bewiesen, dass es unmöglich ist, aus einem ω-konsistenten System einen Beweis für dessen Konsistenz abzuleiten. Wenn man von einer ω -Konsistenz oder sogar von der Korrektheit der Arithmetik ausgeht, muss man auch anerkennen, dass sich die Konsistenz der Arithmetik nicht aus den Axiomen des Systems ableiten lässt. Die Frage der Konsistenz ist folglich unentscheidbar.

[18] Vgl. ebd., 109f, sowie Bülow 1996, 31f.

4 Die Konsistenz der Peano-Arithmetik

Warum ist die Konsistenz der Peano-Arithmetik (PA) so entscheidend für die Mathematik? Zuerst ist es wichtig zu beachten, dass die einzelnen Bereiche der Mathematik, das sind u.a. (euklidische und nicht-euklidische) Geometrie, Arithmetik und Mengenlehre, nicht voneinander unabhängig und nebeneinander existieren, sondern ineinander übergreifen. [19] Die Axiome der PA beispielsweise lassen sich vollständig auf die Axiome der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre (ZF) zurückführen; auch lässt sich aus der PA eine analytische Geometrie entwickeln, die sich zum von David Hilbert aufgestellten Axiomensystem der euklidischen Geometrie als völlig äquivalent erweist.

Eine ganz spezielle Eigenart von Gödels erstem Unvollständigkeitssatz ist, dass dieser nicht durch das Hinzufügen von Axiomen aufgehoben werden kann. Setzt man einen Gödelsatz G als neues Axiom in ein bestehendes Axiomensystem S, lässt sich aus dem dadurch neu entstandenen System S' ein neuer unentscheidbarer Gödelsatz G' konstruieren, und dies ad infinitum. Da die Fähigkeit zu einem Konsistenzbeweis, wie in dieser Arbeit gezeigt, von der Existenz eines unentscheidbaren Gödelsatzes abhängt, lässt sich schlussfolgern, dass jedes mathematische System, aus dem man die Peano-Axiome herleiten kann, und jedes, das aus den Peano-Axiomen herleitbar ist oder eine Erweiterung dieser Axiome darstellt, nicht in der Lage ist, seine eigene Konsistenz zu beweisen.

Eine kleine Abänderung der ursprünglichen Frage: Warum ist die Konsistenz der (axiomatischen) Mathematik so entscheidend? Alle philosophischen Strömungen, die die Existenz einer vom Geist unabhängigen Welt annehmen (und auch alle Reduktionisten und Materialisten, die die Dualität von Geist und Welt zugunsten der alleinigen Existenz der Welt ablehnen,) können sich auf zwei basale Naturgesetze einigen: Entweder etwas existiert oder etwas existiert nicht. Eine dritte mögliche Position existiert nicht (Satz vom ausgeschlossenen Dritten, lat. *principium exclusi tertii* oder *tertium non datur*); auch ist es nicht möglich, dass etwas gleichzeitig existiert und nicht existiert (Nichtwiderspruchsprinzip, lat. *principium contradictionis*).

Diese beiden Prinzipien werden auch als grundlegende Denkgesetze des (menschlichen?) Geistes aufgefasst. Dies bedeutet natürlich nicht, dass ein Mensch keine widersprüchlichen Gedanken haben kann. Sollen sich unsere Gedanken jedoch in irgendeiner Weise auf die Wirklichkeit beziehen, dürfen diese - unter der Voraussetzung, dass die Wirklichkeit widerspruchsfrei ist - einander nicht widersprechen. [20]

4.1 Mathematischer Konstruktivismus

Ludwig Wittgenstein leugnete einen direkten - möglicherweise soger jeglichen - Bezug von Sprache (und damit auch der durch sie ausgedrückten Gedanken) auf die Wirklichkeit: Jeglicher Gedankenaustausch sei damit nur ein hoch entwickeltes Sprachspiel; die einzelnen

[19] Böhm 1966, 79: „Logik, Zahlen- und Mengenlehre bedingen einander".
[20] Vgl. ebd., 88.

Spieler befolgten äußerst komplizierte, von der Gesellschaft entwickelte und einer dynamischen Veränderung unterliegende Regeln. [21] Wittgensteins Sprachphilosophie lässt sich auch auf die Mathematik übertragen und in einer Position formulieren, die besagt, dass alle Mathematiker nur ein hoch entwickeltes Formelspiel miteinander betreiben, das (inklusive seiner Axiome und Regeln) vom Menschen konstruiert wurde und keinerlei Wirklichkeitsbezug aufweist.

Diese Extremposition wird meines Wissens von niemandem vertreten. Die Natur lässt sich zu gut durch die Mathematik beschreiben; selbst nicht-intuitionistische Konzepte wie das der nichteuklidischen Geometrie und die Differentialrechnung fanden beispielsweise in der Relativitätstheorie ihre Anwendung.[22] Viele dieser nicht-intuitionistischen Konzepte, speziell die Differential- bzw. Infinitesimalrechnung, setzen die Unendlichkeit als abstrakte mathematische Größevoraus: Dies widerspricht dem Psychologismus, welcher annimmt, dass mathematische Sätze ausschließlich Gehirnzustände ausdrücken (bzw. dass mathematische Ideen ausschließlich in unserem Kopf existieren); es existieren nämlich nur endlich viele Gehirnzustände, aber unendlich viele Zahlen und mathematische Sätze. E. Fraenkel war deshalb der Meinung, „das aktual Unendliche existier[e] schon, bevor es der Menschengeist entdeckt, als idealer Gegenstand.“ [23]

Eine Theorie, die besagt, dass Mathematik einschließlich ihrer Konzepte wie das der Unendlichkeit nicht entdeckt sondern vom Menschen erschaffen wird, kann man als mathematischen Konstruktivismus bezeichnen.

4.2 Universalität des Nichtwiderspruchsprinzips

Nimmt man jedoch die Widerspruchsfreiheit und das Bilvalenzprinzip (Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten) als grundlegende Eigenschaften der Wirklichkeit an, findet sich darin ein eindeutiger Bezug der Mathematik auf die Wirklichkeit - denn diese Prinzipien finden sich auch in der klassischen Logik. Aus den Peano-Axiomen lassen sie sich folgendermaßen ableiten:

(1.)	$[F \to (G \to H)] \to [(F \to G) \to (F \to H)]$	Ax. L_1
(2.)	$[P \to ((P \to P) \to P)] \to [(P \to (P \to P)) \to (P \to P)]$	$F \equiv P$, $G \equiv (P \to P)$, $H \equiv P$
(3.)	$[F \to (G \to F)]$	Ax. L_2
(4.)	$[P \to ((P \to P) \to P)]$	$F \equiv P$, $G \equiv (P \to P)$
(5.)	$[P \to (P \to P)] \to (P \to P)$	MP (4,2)
(6.)	$[P \to (P \to P)]$	Ax. L_1 mit $F \equiv P$, $G \equiv P$
(7.)	$(P \to P)$	MP (6,5)
(8.)	$(\neg P \vee P)$	$def_\vee$ (7)
(9.)	$\neg(P \wedge \neg P)$	$def_\wedge$ (7)

Dieser Wirklichkeitsbezug wäre dann ein starkes Argument gegen einen kompletten mathematischen Konstruktivismus. Nun kann man eben einwenden, dass die zwei genannten

[21] Vgl. Blume / Demmerling 1998, 108-120.
[22] Die relative Unsicherheit der Relativitätstheorie beträgt ca. $1{:}10^{14}$. Vgl. Penrose 2002, 72.
[23] Böhm 1966, 74.

Prinzipien nicht universell gültig sind und wir sie nur in die Welt hineininterpretieren. Da jeder Beweis des Nichtwiderspruchsprinzips das Prinzip selbst voraussetzen würde, lässt sich nur dessen Leugnung transzendentalpragmatisch widerlegen: Eine Leugnung setzt nämlich immer dieses Prinzip voraus und wäre demnach überhaupt nicht möglich. [24] Außerdem darf man fragen, warum diese Prinzipien basale Denkgesetze darstellen. Haben diese Denkgesetze etwas mit der Struktur der das Gehirn bildenden Materie zu tun, dann wären sie doch aus der Wirklichkeit abgeleitet; würde man behaupten, sie stellten nur zufällige Mutationen im Verlauf der Evolution dar, müsste man eine mögliche alternative Entwicklung aufzeigen können. Wenn man die Begegnung mit außerirdischen Lebensformen abwarten würde, welche auf einer ähnlich hohen (oder niedrigen) Entwicklungsstufe sind wie die Menschen und deren logische Denkgesetze und vielleicht sogar die von dieser Zivilisation entwickelten mathematischen Axiome mit unseren übereinstimmen würden, hätte man ein starkes Argument für die universelle Gültigkeit dieser Denkgesetze in der Hand.

4.3 Mathematischer Realismus

Wenn das Prinzip des nicht gegebenen Dritten (welches direkt aus dem Nichtwiderspruchsprinzip ableitbar ist) absolut gültig ist, gibt es für jede mathematische Vermutung eine klare Antwort. Beispielsweise ist die Goldbachsche Vermutung, die besagt, dass jede gerade Zahl größer als zwei als Summe zweier Primzahlen gebildet werden kann, demnach entweder wahr oder falsch, unabhängig davon, ob schon einen Beweis für bzw. gegen diese Vermutung erbracht wurde oder ob nie einer gefunden werden kann.

Auch die Annahme, dass die Peano-Arithmetik konsistent ist, muss dann entweder wahr oder falsch sein, obwohl sie nachweislich unentscheidbar ist. Und nur wenn sie konsistent ist, kann sie auch ein Teil der Wirklichkeit sein.

Paul Benacerraf spricht sich gegen einen mathematischen Realismus (Platonismus) aus: Die in der Raumzeit existierenden Menschen hätten keinen Zugung zu abstrakten (außerhalb der Raumzeit existierenden) Objekten, deshalb könnten die Objekte unseres mathematischen Wissens nicht abstrakt sein. [25] Um Benacerrafs Zugangseinwand zu widerlegen, muss jeder Platoniker seine Prämisse leugnen und damit behaupten, dass Menschen einen Zugang zur abstrakten Welt besitzen. [26] Dies war auch Gödels Auffassung:

> „[...] we do have something like a perception also of the objects of set theory, as is seen from the fact that the axioms force themselves upon us as being true. I don't see any reason why we should have less confidence in this kind of perception, i.e. in mathematical intuition, than in sense perception, which induces us to build up physical theories and to expect that future sense perception will agree with them and, moreover, to believe that a question not decidable now has meaning and may be decided in the future.“ [27]

Die Behauptung, der menschliche Geist besitze die Fähigkeit, mathematische Gegenstände

[24] Vgl. Schöndorf 2006, 25f und 81.
[25] Vgl. Lakoff / Nuñez 2000, 356.
[26] Vgl. Benacerraf 1985, 30-33.
[27] Gödel 1985, 484f.

oder Sachverhalte durch mathematische Intuition wahrzunehmen, kann man als *Gödels Zugangsthese* beschreiben.

Um einen mathematischen Realismus (Platonismus) zu vertreten, so lässt sich zusammenfassen, muss man folgende Punkte akzeptieren:

1. Das Nichtwiderspruchsprinzip ist ein basales Denkgesetz. Ohne dieses Prinzip für gültig zu halten ist kein vernünftiges Denken möglich.

2. Das Nichtwiderspruchsprinzip ist ein basales Gesetz der Wirklichkeit. Wäre dies nicht der Fall, gäbe es keinen Sinn, Aussagen über die Wirklichkeit zu machen. Damit wäre nicht nur die Metaphysik, sondern auch jede Naturwissenschaft sinnlos.

3. Indem wir das Nichtwiderspruchsprinzip erkennen, haben wir einen Zugang zu einem gültigen abstrakten Prinzip. Dieses setzt die Idee der Negation voraus, welche nicht empirisch erlangt werden kann. Menschen haben folglich einen nicht-empirischen Zugang zu Wahrheiten a priori, welche zumindest die natürlichen Zahlen, die Negation, die Idee der Unendlichkeit, das Nichtwiderspruchsprinzip und das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten beinhalten.

4. Die axiomatischen Systeme der Mathematik haben sich aus empirischen und apriorischen Fakten entwickelt. Die Mathematik entwickelte sich aus der Geometrie und den Grundrechenarten mithilfe apriorischer intuitiver Prinzipien hoch zu einem äußerst komplexen Gebäude.

5. Die Peano-Arithmetik bzw. die Zermelo-Fraenkelsche Mengenlehre sind korrekte Subsysteme eines natürlichen Systems $\mathcal{N}$, das alle Wahrheiten beinhaltet, jedoch nicht formalisierbar ist. Aus diesem apriorischen System lassen sich wiederum sehr viele empirische Fakten (wie z.B. die Beschaffenheit von Raum, Zeit und Materie) mit erstaunlicher Genauigkeit ableiten.

6. Die axiomatische Mathematik ist genau wie die Wirklichkeit konsistent.

5 Schlussworte

Das Bivalenzprinzip ist, vor allem durch die wissenschaftlichen Errungenschaften des 20. Jahrhunderts, nicht unumstritten: Die heutige Theorie der Quantenmechanik beschränkt durch die Heisenbergsche Unschärferelation das gleichzeitige Messen von Impuls und Position eines Teilchen mit beliebig hoher Genauigkeit. Diese Grenze scheint keine epistomologische, sondern eine natürliche zu sein. Die gängige Interpretation dieser Theorie ist, dass ein Teilchen erst eine Position bzw. einen Impuls einnimmt, wenn sein Zustand gemessen wird. Nur während eines Messvorgangs existiert ein Elektron oder ein anderes Teilchen als „Individuum“. Wie kontraintuitiv dies ist, zeigt sich am Beispiel von Schrödingers Katze: Solange niemand den geschlossenen Kasten öffnet und nachschaut, ist die Katze tot und lebendig zugleich.[28] Trotz der scheinbaren fehlenenden Gültigkeit des Nichtwiderspruchsprinzip lässen sich die Quantenzustände, bzw. zumindest ihre Wahrscheinlichkeiten, sehr exakt [29] durch unsere das Bivalenzprinzip umfassende Mathematik beschreiben.

[28] Schrödinger drückte dies folgendermaßen aus: „Die halbe lebende und die halbe tote Katze sind durch den ganzen Kasten verschmiert.“, zitiert nach Jammer 1973, 215-218.

[29] Mit einer Genauigkeit von $1 : 10^{11}$. Vgl. Penrose 2002, 72.

Bertrand Russell diskreditierte Freges Versuch eines Logizismus durch das Aufzeigen einer Antinomie der ursprünglichen Mengenaxiome: Die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten, $\mathbb{M} = \{\mathbb{X} \mid \mathbb{X} \notin \mathbb{X}\}$. Ernst Zermelo und Abraham Fraenkel fügten deshalb das Fundierungsaxiom hinzu, das sicherstellt, dass keine Menge sich selbst enthält. [30] Dass man keine Allmenge bilden kann, ohne zu Antinomien zu gelangen (Cantor's Antinomie[31]) stellt eine weitere absolute Grenze menschlicher Erkenntnis dar.

Die Wirklichkeit lässt sich folglich unmöglich in ihrer Gesamtheit formalisieren. Ein solcher Versuch scheitert im Mikro- und Makrokosmos [32] so wie in der axiomatischen Mengenlehre.

Gödel nennt neben der mathematischen Intuition die „fruitfulness in mathematics and [...] also in physics“ [33] der mathematischen Axiome als wichtiges Kriterium für deren Wirklichkeitsbezug. Natürlich unterliegen die mathematischen Axiome einer historischen Entwicklung. Eine wichtige Errungenschaft Gödels war auch, dass er aufzeigte, dass sich das Auswahlaxiom und die Kontinuumshypothese in die Axiome der Mengenlehre widerspruchsfrei einfügen lassen. Dies soll uns auch jetzt eine Mahnung sein, dass eine Maximalkonsistenz der Axiomatik noch lange nicht erreicht ist. Eine apriorischen Geltung eines Axiomensystems ist zwar nicht beweisbar; je besser es aber die Wirklichkeit beschreiben kann, ohne dabei intuitive, dem Geist eigene Konzepte wie das Bivalenzprinzip aufzugeben, desto mehr ist dies ein Indiz für einen echten Wirklichkeitsbezug der Axiome. Wichtig ist der Ausdruck „Bezug“: Das Axiomensystem kann nie ein genaues Abbild des natürlichen (platonischen) Systems $\mathcal{N}$ sein, sondern immer nur ein Subsystem dessen.

[30] Vgl. Slupecki / Borkowski 1967, 297f.
[31] Vgl. ebd.
[32] Im Makrokosmus ergeben sich durch die Relativitätstheorie folgende epistomologische Probleme: Der Kosmos dehnt sich schneller aus, als erkennende Wesen reisen können; bei Quantensingularitäten gehen Quanten- und Makrophysik ineinander über; durch die Relativitätstheorie ist das Prinzip der Gleichzeitigkeit nicht mehr haltbar.
[33] Gödel 1985, 485.

6 Literaturverzeichnis

Benacerraf, Paul / Putnam, Hilary, Introduction, in: Dieselben, Philosophy of mathematics. Selected readings, Cambridge u.a. 1985, 1-40.

Blume, Thomas / Demmerling, Christoph, Grundprobleme der analytischen Sprachphilosophie, München u.a. 1998.

Böhm, Walter, Die metaphysischen Grundlagen der Naturwissenschaft und Mathematik, Wien 1966.

Bülow, Christopher von, Beweisbarkeitslogik für Rosser-Sätze. Diplomarbeit im Fach Mathematik an der Universität Konstanz, 1998,
http://www.ub.uni-konstanz.de/kops/volltexte/2001/649/pdf/CvBdipl.pdf (20.09.06).

Gödel (1985), Kurt, What is Cantor's Continuum Problem? In: Benacerraf, Paul / Putnam, Hilary (Hgg.), Philosophy of mathematics. Selected readings, Cambridge u.a. 1985, 470-485.

Gödel (1988), Kurt, On Formally Undecidable Propositions of Principia Methematica and Related Systems I, in: Shaker, Stuart S. (Hrsg.), Gödels Theorem in focus, London - New York - Sydney 1988, 17-47.

Jammer, Max, The philosophy of quantum mechanics, New York u.a. 1974.

Lakoff, George und Nunez, Rafael, Where Mathematics Comes From. How the Embodied Mind Brings Mathematics Into Being, New York 2000.

Penrose, Roger, Das Große, das Kleine und der menschliche Geist. Mit Kommentaren von Abney Shimony, Nancy Cartwright und Stephen Hawking, Heidelberg - Berlin 2002.

Schöndorf, Harald, Erkenntnislehre. Skriptum zur Vorlesung WS 2005/2006, München 2006.

Smullyan, Raymond M., Gödels Incompleteness Theorems, New York - Oxford 1992.

Slupecki, Jerzy / Borkowski, Ludwik, Elements of mathematical logic and set theory (International series of monographs on pure and applied mathematics 96), Oxford - Warschau 1967.

7 Anhang

7.1 Verwendete Codierung zur Gödelisierung

Die bijektive Projektion aller möglichen arithmetischer Ausdrücke auf die Menge $\mathbb{N}$ nennt sich Gödelisierung. Im mathematischen „Alphabet“ gibt es zwar zahlreiche „Buchstaben“, jedoch lassen sich die meisten davon mithilfe anderer ausdrücken. So lässt sich z.B. statt $(x \wedge y)$ salva veritate $\neg(x \rightarrow \neg y)$ schreiben, was das Symbol $\wedge$ überflüssig macht; auch lässt sich der Existenzquantor mithilfe des Allquantors ausdrücken $(\forall x\ F(x) \equiv \neg\exists x\ \neg F(x))$. Hier wird eine mögliche Reduktion des arithmetischen Alphabets auf 13 Symbole verwendet [34]

’	0	(	)	f	≀	v	¬	→	∀	=	≤	♯
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	η	ϵ	δ

Ein Ausdruck wird nun gödelisiert, indem jedes Symbol des Ausdrucks hintereinander in die dazugehörige Ziffer in einem Zahlensystem zur Basis 13 (η_{13} steht für 10_{10}, ϵ_{13} für 11_{10} und δ_{13} für 12_{10}) codiert wird.

- Das Symbol 0 (mit der Gödelzahl 1) bezeichnet die Zahl 0.
- ’ ist ein Kürzel für die Nachfolgefunktion der natürlichen Zahlen. Z.B. entspricht die Gödelzahl 1000 der Zahl 3.
- Die Symbole f und das Subskript ≀ codieren alle Operatoren. So kann man z.B. dem Additionsoperator die Gödelzahl 45, anderen Operatoren 455... zuweisen.
- Mit Hilfe von v und ≀ lassen sich Variablen darstellen. So enspricht die Gödelzahl 655 der Variable v_2.
- Das Symbol ♯ wird verwendet, um geordnete Mengen (n-Tupel) zu gödelisieren. Z.B. enspricht der Gödelzahl $\delta 1\delta 100\delta 10000\delta$ dem 3-Tupel $(0, 2, 4)$.

Z.B. wird der Ausdruck $(1 \leq 2)$ zunächst auf $(0' \leq 0'')$ reduziert und danach zu $310\epsilon 1004_{13}$, was der Dezimalzahl 193388732 enspricht, codiert.

7.2 Die Axiome der Peano-Arithmetik

Im 4. Kapitel werden die logischen Axiome von P.A., das sind die ersten drei bzw. vier, zur Beweisführung herangezogen.
L_1: $(F \rightarrow (G \rightarrow F))$
L_2: $(F \rightarrow (G \rightarrow H)) \rightarrow ((F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow H))$
L_3: $((\neg F \rightarrow \neg G) \rightarrow (G \rightarrow F))$
...
Normalerweise, seltsamerweise jedoch nicht bei Smullyan, wird zu den logischen Axiomen der Peano Arithmetik auch noch ein viertes Axiom zur Beseitigung der dopelten Negation gerechnet: L_4: $\neg\neg F \rightarrow F$. Die weiteren Axiome sind in Smullyan, 29, zu finden.

7.3 Arithmetizität einzelner Funktionen

7.3.1 Sb(x)

Ein Ausdruck E_x ist dann eine Kette von Subskripts, wenn in jedem möglichen Teil von E_x mindestens ein Subskript vorkommt.

$$(\forall y\ \leq x)(yPx \rightarrow 5Py) \tag{19}$$

[34] Auch eine Reduktion auf 12 Symbole wäre möglich, da sowohl die Subjunktion als auch die Negation allein mithilfe des Sheferschen Strich (NAND-Operator) oder alternativ dazu auch allein durch den NOR-Operator ausdrückbar sind. Der Übersichtlichkeit wegen wird hier jedoch auf eine maximale Reduktion aller Symbole verzichtet.

7.3.2 A(x)

Vgl. Gödel 1988, 28; vgl. dazu auch Smullyan 1992, 36.

7.3.3 $\mathbf{Pow_{13}(x)}$, $\theta(\mathbf{x})$

Ein Zahl x ist ein Teiler von y, wenn es eine ganze Zahl gibt, die mit x multipliziert, z ergibt. Eine Zahl x ist eine 13er-Potenz, wenn jeder Teiler (größer als 1) von x ein Vielfaches von 13 ist. Die Funktion $\theta(x)$ gibt die kleinstmögliche 13er-Potenz an, die größer als x ist.

$$\begin{array}{l} x \text{ div } y \Leftrightarrow (\exists z \leq y\ )(x \times z = y) \\ y = Pow_{13}(x) \Leftrightarrow y = (\forall z \leq x\ )((z \text{ div } x \wedge z \neq 1) \rightarrow 13 \text{ div } z) \\ y = \theta(x) \Leftrightarrow (Pow_{13}(y) \wedge y > x \wedge y > 1) \wedge (\forall z < y)\neg(Pow_{13}(z) \wedge z > x \wedge z > 1) \end{array} \tag{20}$$

7.3.4 x ∗ y

Eine Verknüpfung zweier Ausdrücke E_x und E_y hat die Gödelnummer $x * y$. Diese Verknüpfung ist arithmetisch:

$$x * y = z \Leftrightarrow \exists z_1\ \exists z_2\ (\theta(y) = z_1 \wedge (x \times z_1 = z_2) \wedge (z_2 + y = z)) \tag{21}$$

Es lässt sich daraus auch leicht zeigen, dass die Relation $x_1 * x_2 * ... * x_n = y$ arithmetisch ist. [35]

7.3.5 xBy, xPy, xEy und deren Negation

xBy bedeutet, dass der Ausdruck E_y mit dem Ausdruck E_x beginnt oder sogar mit ihm identisch ist, xPy bedeutet, dass das Ausdruck E_x ein Teil des Ausdrucks E_y darstellt, und xEy bedeutet, dass der Ausdruck E_y mit dem Ausdruck E_x endet. Bei einer Gödelisierung zur Basis 13 gilt:

$$\begin{array}{l} xBy \Leftrightarrow x = y \vee (x \neq 0 \wedge (\exists z\ \leq y)(\exists w\ \leq y)(Pow_{13}(w) \wedge (x \times w) * z = y)) \\ xPy \Leftrightarrow (\exists z\ \leq y)(z * x = y) \\ xEy \Leftrightarrow x = y \vee (\exists z\ \leq y)(z * x = y) \quad [36] \end{array} \tag{22}$$

Die Negation dieser drei Operatoren werden dargestellt als $x\tilde{B}y$, $x\tilde{P}y$, $x\tilde{E}y$. Diese sind natürlich ebenso arithmetisch.

7.3.6 x ∈ y

y ist eine Folge und x, das wiederum keine Folge sein darf, ist ein Element von y.

$$x \in y \leftrightarrow Seq(y) \wedge dxdPy \wedge d\tilde{P}x \quad [37] \tag{23}$$

7.3.7 $\mathbf{x \prec_z y}$

Der Ausdruck E_x tritt in der Folge mit der Gödelnummer z *vor* dem Ausdruck E_y auf.

$$x \prec_z y \leftrightarrow x \in z \wedge y \in z \wedge (\exists w\ \leq z)(wBz \wedge x \in w \wedge \neg y \in w) \quad [38] \tag{24}$$

7.3.8 Existenzquantor

$\exists x\ F(x)$ entspricht $\neg\forall x\ \neg F(x)$
$(\exists x \leq y)\ F(x)$ entspricht $\exists x\ (x \leq y \wedge F(x))$
$(\forall x \leq y)\ F(x)$ entspricht $\forall x\ (x \leq y \rightarrow F(x))$
$(\forall x \in y)\ F(x)$ entspricht $\forall x\ (x \in y \rightarrow F(x))$

[35] Vgl. Smullyan 1992, 22.
[37] Smullyan 1992, 32.
[38] Smullyan 1992, 32.

8 Glossar

Axiom	Axiome sind als gültig anerkannte Grundsätze von (mathematischen) Theorien, welche wiederum nicht von anderen Axiomen abgeleitet werden können.
Bedeutungsvoller Ausdruck	Ein bedeutungsvoller Ausdruck ist ein Ausdruck, der kein Symbol zur Folgenbildung ♯ beinhaltet, also keine Folge darstellt.
Diagonalisierbarkeit	Ein System ist dann diagonalisierbar, wenn sich für jede Formel $F(v_1)$ ein Fixpunkt konstruieren lässt.
Fixpunkt	(siehe 3.1)
Formel	Eine Formel ist entweder eine Verknpfung zweier Terme mit $=$ oder $\leq$ (dann ist die Formel atomar) oder aber die Negation einer Formel ($\neg F$) oder eine Verknüpfung zweier anderer Formeln mit einer Subjunktion ($F \rightarrow G$).
Gödelzahl	(siehe 7.1)
Konsistenz	Ein System ist dann konsistent, wenn sich aus dessen Axiomen ein Satz nicht ableiten lässt, wenn dessen Negation ableitbar ist.
Prädikat	Ein Prädikat ist eine Formel, die eine ungebundene Variable enthält. Setzt man für diese Variable eine Zahl ein, ergibt sich ein Satz.
Satz	Ein Satz ist eine geschlossene Formel, d.h. eine Formel, bei der keine Variable ungebunden auftritt.
Term	Ein Term ist entweder eine Variable, eine Zahl oder eine Verbindung zweier anderer Terme mit einem Operator